

УДК 004.942:624.073.12

А.Л. Становский, д-р техн. наук, Е.А. Науменко,
Абу Шена Осама, Одесса, Украина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ В САПР РАВНОНАПРЯЖЕННЫХ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Встановлено, що у корпусах апаратів, працюючих під тиском, найбільш слабким елементом є плоске днище, у зв'язку з чим доводиться збільшувати його товщину в 3 – 5 разів у порівнянні з товщиною стінки. Запропоновано метод проектування рівнонапружених вузлів циліндричних резервуарів, що містять плоскі круглі пластини змінної товщини, форма діаметральних перерізів яких моделюється рівнянням Гаусса. Метод випробувань у реальному проектуванні з позитивним техніко-економічним ефектом.

Ключові слова: метод проектування, циліндричні резервуари

Установлено, что в корпусах аппаратов, работающих под давлением, наиболее слабым элементом является плоское днище, в связи с чем приходится увеличивать его толщину в 3 – 5 раз по сравнению с толщиной стенки. Предложен метод проектирования равнонапряженных узлов цилиндрических резервуаров, содержащих плоские круглые пластины переменной толщины, форма диаметральных сечений которых моделируется уравнением Гаусса. Метод испытан в реальном проектировании с положительным технико-экономическим эффектом.

Ключевые слова: метод проектирования, цилиндрические резервуары

It is established that in the casing of the apparatus, pressure of the weakest element is the flat bottom, therefore it is necessary to increase its thickness in 3-5 times in comparison with the wall thickness. The proposed design method is equally stressed nodes of cylindrical tanks comprising a flat circular plate of variable thickness, the shape of the diametrical sections which is modeled by the equation of Gauss. The method is tested in real design with a positive technical and economic effect.

Keywords: design method, cylindrical tanks

Постановка проблемы и ее связь с важнейшими научно-практическими заданиями

В процессе создания новых деталей машин проектировщик должен всегда стремиться к максимальной эффективности проекта. Одним из составляющих такой эффективности является требование равнонапряженности деталей, обеспечивающее максимальное значение отношения «сопротивление/масса» и, соответственно, минимальную материалоемкость изделия в целом.

К сожалению, добиться полного равенства напряжений во всех точках детали невозможно даже для статической задачи. Это объясняется различным влиянием нагружения на отдельные элементы деталей сложной формы, неоднородностью их материала и другими конструктивными и технологическими особенностями.

Поэтому любая попытка проектирования равнонапряженных деталей будет лишь способом приблизиться к максимуму эффективности. Известно, что, например, в корпусах аппаратов, работающих под давлением, наиболее слабым элементом является плоское днище, в связи с чем приходится увеличивать его толщину в 3 – 5 раз по сравнению с толщиной стенки. Настоящая статья представляет собой попытку решить эту проблему за счет варьирования одной из основных конструктивных характеристик – толщины плоского днища резервуара, нагруженного внутренним давлением.

Анализ последних исследований и публикаций

Большинство машиностроительных деталей и узлов содержат технологические полости и отверстия, непосредственно не необходимые для выполнения этими деталями своих функциональных «обязанностей» и придающие этим деталям причудливые, зачастую нетехнологичные формы. Конструкторы, например, зачастую интуитивно заменяют в объектах проектирования круглый сплошной прокат на трубу, круглую трубу на эллиптическую, удаляют часть «тела» зубчатых колес, конструкционных панелей и многое другое [1].

Наиболее ярко это проявляется в деталях, предназначенных для объектов транспорта: сложные формы деталей фюзеляжа самолетов и ракет [2], кузовов автомобилей [3]. От правильно рассчитанной формы зависит надежность ответственных деталей – лопаток турбин [4] и многое другое. Цель такого усложнения – получить равнонапряженную деталь или узел, что, как известно [5, 6], позволяет получить наиболее благоприятное соотношение масса детали / ее НДС.

Еще одним примером таких конструкций являются сосуды, работающие под давлением, их корпуса и днища [7]. Наиболее распространенными элементами существующих корпусных конструкций сосудов являются пластины и оболочки постоянной толщины. В большинстве случаев поля возникающих в них напряжений являются существенно неоднородными [8]. Следовательно, практически невозможна минимизация массы корпусных конструкций без использования в них элементов переменной толщины. В некоторых случаях находят паллиативное решение этой проблемы, например, стенки крупных вертикальных цилиндрических резервуаров для хранения нефтепродуктов изготавливают со ступенчато изменяющейся толщиной [9, 10]. Подобное решение также должно основываться на расчете пластин переменной толщины, контур которых упруго крепится к цилиндрической стенке.

По условиям нагружения таких объектов наиболее напряженным участком являются места стыка (чаще всего, сварки) обечайки и днища [11]. Прочностные расчеты показывают, что именно в этом месте толщина днища

должна быть наибольшей, что приводит к весьма нетехнологичному решению: изготавливать днища сосудов в виде круглых пластин с переменной от центра к краю толщины [12 - 14].

Конструкция такого сложного изделия получается в результате сложных расчетов по уравнениям сопротивления материалов, представляющим собой неоднородные дифференциальные уравнения второй степени [15]. Решение таких уравнений для конкретных объектов записывают в виде суммы общего и частных решений, то есть оно состоит из двух линейно независимых функций [16].

Однако, такие подходы не обеспечивают оптимизацию конструкций сосудов, так как получаемые при этом детали и узлы равного напряжения еще не гарантируют одновременного достижения минимальной массы будущего объекта [17]. В то же время, существует математический аппарат гипергеометрических функций, с помощью которого подобная проблема может быть решена [18, 19].

Для одновременного достижения равнонапряженности и минимальной массы необходимо разработать новый метод, учитывающий такую постановку эффективной оптимизации и модель изгиба пластин разной толщины, необходимую для реализации этого метода.

Цель работы

Целью настоящего исследования является снижение металлоемкости конструкций на этапе автоматизированного проектирования путем создания равнонапряженных конструктивных элементов при сохранении показателей их надежности за счет рационального перераспределения используемых материалов внутри элемента.

Для достижения этой цели в работе были поставлены и решены следующие задачи:

- разработать метод оптимизации формы круглой пластины переменной толщины, заключающийся в переходе от фиксированной толщины пластинки в ее центре к ее фиксированному объему;
- разработать модель изгиба круглой пластины переменной толщины в виде экспоненциальной функции Гаусса, учитывающую зависимость толщины в центре пластинки от ее объема.

Изложение основного материала

Метод проектирования формы равнонапряженных узлов сопряжения конструктивных элементов.

Рассмотрим круглые пластинки радиуса R , поверхности которых одна плоская и одна вогнутая (рис. 1, *a*), либо обе – вогнутые (рис. 1, *б*).

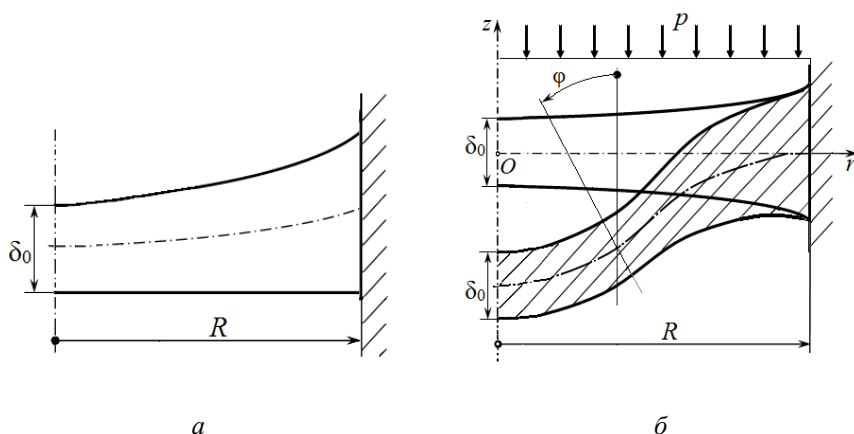


Рисунок 1 – Круглая пластина переменной толщины, защемленная по контуру $r=R$: *а* – плоско-вогнутая форма диаметрального сечения; *б* – двояковогнутая форма

Изменение толщины пластинки в радиальном направлении r в достаточно общем случае можно описать функцией Гаусса [8]:

$$\delta(r) = \delta_0 \exp(-nr^2/6R^2), \quad (1)$$

где: δ_0 – толщина пластины в центре при $r=0$.

Параметр n в уравнении (1) определяет интенсивность изменения толщины круглой пластины в радиальном направлении. В окружном направлении толщина остается постоянной, т.е. форма пластины предполагается осесимметричной.

Плоско-вогнутая форма сечения пластинки получается, если $\delta(r)$ откладывать от плоской нижней поверхности, двояковогнутая – если по обе стороны от плоскости $z=0$ откладывать размеры $0,5\delta(r)$. Получаемая форма диаметрального сечения является общей, так как функцией (1) при положительных значениях параметра n могут быть описаны также и пластинки с выпуклыми поверхностями (кривые 4 и 5, рис. 2).

Формы поверхностей с параметром $n < 0$ можно рекомендовать для круглых пластин, изгибаемых поперечной нагрузкой p при жестком защемлении их контура, когда на контуре действует максимальный изгибающий момент (рис. 1, б). При шарнирном закреплении контура максимальный изгибающий момент возникает в центре пластины, и предпочтительной становится форма с максимальной толщиной в центре.

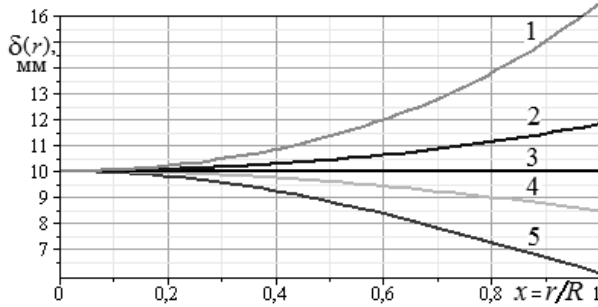


Рисунок 2 – Графіки залежності товщини круглої пластини від її відносного радіуса $x = r / R$ при $\delta_0=10$ мм для деяких значень параметра n : $n = -3$ (1); $n = -2$ (2); $n = 0$ (3); $n = +2$ (4); $n = +3$ (5)

Для жорстко защемленої пластинки ця ціль досягається переміщенням матеріалу з недогруженої центральної зони до периферії при збереженні постійним об'єму пластини V_0 . Формула, що визначає зміну товщини такої пластини в радіальному напрямку, отримана з (1) у вигляді

$$\delta_V(x) = \frac{V_0}{\pi R^2} \cdot \frac{n}{6[1 - \exp(-n/6)]} \exp\left(-\frac{nx^2}{6}\right). \quad (2)$$

Вторий множитель в (2) має неопределенність при $n=0$. Для цього значення слід прийняти

$$\lim_{n \rightarrow 0} K(n) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n}{6[1 - \exp(-n/6)]} = 1. \quad (3)$$

Зміна товщини в радіальному напрямку, визначене функцією (2) для деяких значень параметра $n \leq 0$ представлено на рис. 3. Дифференціальне рівняння осесиметричного вигину такої пластини при рівномірно розподіленій навантаженні (тисненні) p відносно кута повороту нормалі до серединної поверхності ϕ має другого порядку [5]:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - nx\right) \frac{d\phi}{dx} - \left(\frac{1}{x^2} + \mu n\right) \phi = -\bar{p}x \exp\left(\frac{nx^2}{2}\right) \quad (4)$$

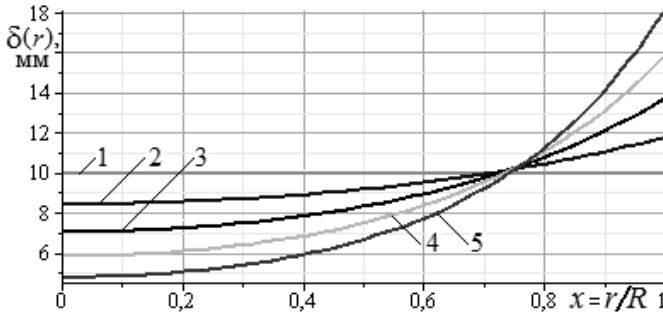


Рисунок 3 – Графики зависимости толщины круглой пластины от её относительного радиуса $x = r / R$ при $V_0/(\pi R^2)=10$ мм для некоторых значений параметра n : $n=0$ (1); $n=-2$ (2); $n=-4$ (3); $n=-6$ (4); $n=-8$ (5)

Содержащийся в правой части (4) безразмерный параметр \bar{p} зависит от принятой математической модели диаметрального сечения пластины:

– при уравнении формы пластины в виде (1) имеем:

$$\bar{p} = \bar{p}_\delta = 6(1 - \mu^2) \frac{pR^3}{E\delta_0^3}, \quad (5)$$

– при уравнении формы пластины в виде (2) имеем:

$$\bar{p} = \bar{p}_V = 6(1 - \mu^2) \frac{p}{E} \left[\frac{6\pi R^3}{V_0} \cdot \frac{1 - \exp(-n/6)}{n} \right]^3 \quad (6)$$

где p – интенсивность равномерно распределенной нагрузки; E , μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины.

Интеграл неоднородного уравнения (2) состоит из двух слагаемых, частного и общего решений.

Частное решение выглядит следующим образом:

$$\varphi_0 = -\frac{\bar{p}x}{(3 - \mu)n} \exp\left(\frac{nx^2}{2}\right), \quad (7)$$

где \bar{p} определяется формулой (5) или (6), в зависимости от способа задания формы диаметрального сечения пластины.

Общее решение однородного уравнения (4) (при равенстве нулю правой части) задано в [5] степенным рядом, что при практических расчетах представляет определенные вычислительные трудности. В работе решение однородного уравнения представлено с помощью вырожденных гипергеометрических функций Уиттекера $M_{k,\gamma}(z)$, $W_{k,\gamma}(z)$ [17]:

$$\varphi_1(x) = \frac{\exp(0,25nx^2)}{x} \left[C_1 M_{k,\gamma} \left(\frac{1}{2} nx^2 \right) + C_2 W_{k,\gamma} \left(\frac{1}{2} nx^2 \right) \right] \quad (8)$$

где $k=(1-\mu)/2$, $\gamma=1/2$; C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Собственные функции решения (8) равны:

$$F_1(x) = x^{-1} \exp(0,25nx^2) M_{k,\gamma} \left(\frac{1}{2} nx^2 \right); \quad (9)$$

$$F_2(x) = x^{-1} \exp(0,25nx^2) W_{k,\gamma} \left(\frac{1}{2} nx^2 \right). \quad (10)$$

Примеры графиков функций (9) и (10) при значениях $n = 3$ и коэффициенте Пуассона $\mu = 0,3$ представлены на рис. 4.

Функция $F_2(x)$ неограниченно возрастает при $x \rightarrow 0$, поэтому для круглой пластины принимали в (5) $C_2=0$. Для кольцевой пластины константы C_1 и C_2 могут быть определены из граничных условий.

Функции Уиттекера в некоторых случаях усложняют анализ получаемых решений, поэтому нами предложено заменить их функциями Куммера [16, 19]:

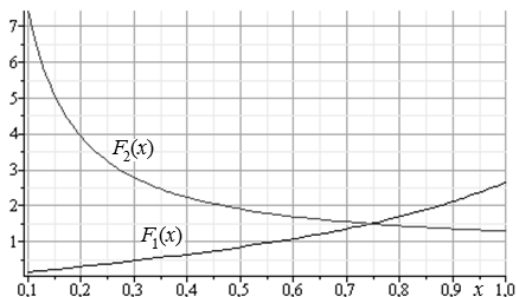


Рисунок 4 – Примеры графиков собственных функций (9) и (10)

$$M_{k,\gamma}(z) = e^{-z/2} z^{1/2+\gamma} M \left(\frac{1}{2} + \gamma - k; 1 + 2\gamma; z \right), \quad (11)$$

$$W_{k,\gamma}(z) = e^{-z/2} z^{1/2+\gamma} U \left(\frac{1}{2} + \gamma - k; 1 + 2\gamma; z \right). \quad (12)$$

После подстановки функций (11) и (12) в (8) получаем:

$$\phi_1(x) = x^{\gamma-1/2} \left[C_1 M \left(\frac{1}{2} + \gamma - k; 1 + 2\gamma; \frac{1}{2} nx^2 \right) + C_2 U \left(\frac{1}{2} + \gamma - k; 1 + 2\gamma; \frac{1}{2} nx^2 \right) \right]. \quad (13)$$

При приведенных выше значениях параметров γ , k и частном решении (7) угол поворота нормали к срединной поверхности пластинки определяется в виде:

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \phi_1(x) = \frac{nx}{2} \cdot \left[C_1 M\left(\frac{1+\mu}{2}; 2; \frac{1}{2}nx^2\right) + C_2 U\left(\frac{1+\mu}{2}; 2; \frac{1}{2}nx^2\right) \right] - \frac{\bar{p}x}{(3-\mu)n} \exp\left(\frac{nx^2}{2}\right). \quad (14)$$

Решение в форме (11) может быть использовано для кольцевых пластинок, т.е. в тех случаях, когда относительный радиус их контуров $x_1 \leq x \leq 1$. Для сплошных пластинок, например, для днища или крышки цилиндрического сосуда, нужно принимать $C_2=0$, т.к. решение с функцией Куммера второго рода $\frac{nx}{2} \cdot U\left(\frac{1+\mu}{2}; 2; \frac{nx^2}{2}\right)$ неограниченно возрастает при $x \rightarrow 0$. Следовательно, решение задачи изгиба сплошной круглой пластинки переменной толщины будем искать в виде:

$$\phi(x) = C_1 \frac{nx}{2} \cdot M\left(\frac{1+\mu}{2}; 2; \frac{1}{2}nx^2\right) - \frac{\bar{p}x}{(3-\mu)n} \exp\left(\frac{nx^2}{2}\right). \quad (15)$$

Очевидно, что решение (15) удовлетворяет необходимому условию $\phi|_{x=0} = 0$. Если зависимость угла поворота нормали к срединной поверхности пластинки $\phi(x)$ определена, то уравнение этой поверхности найдем интегрированием:

$$w(r) = -R \int \phi(x) dx + C_0 = C_0 + \frac{C_1 R [F_1(x) + F_2(x)]}{(1-\mu)(3-\mu)} - \frac{\bar{p} R x \exp(0,5nx^2)}{(3-\mu)n^2}, \quad (16)$$

где

$$F_1(x) = \left[3 - \mu(4-\mu) - nx^2(3-\mu) \right] M\left(\frac{1+\mu}{2}; 2; \frac{nx^2}{2}\right), \quad (17)$$

$$F_2(x) = \left[3 + \mu(2-\mu) \right] M\left(\frac{3+\mu}{2}; 2; \frac{nx^2}{2}\right). \quad (18)$$

Перейдем далее к моделям, содержащим нагруженные пластины. В этом случае радиальный и окружной изгибающие моменты определяются формулами:

$$M_r = \frac{D_1(x)}{a} \left(\frac{d\phi(x)}{dx} + \frac{\mu}{x} \phi(x) \right), \quad (19)$$

$$M_t = \frac{D_1(x)}{a} \left(\frac{\phi(x)}{x} + \mu \frac{d\phi(x)}{dx} \right). \quad (20)$$

где цилиндрическая жесткость пластинки с переменной толщиной, соответствующей (1), имеет вид:

$$D_1(x) = \frac{E\delta_0^3}{12(1-\mu^2)} \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right). \quad (21)$$

В результате получаем формулу для радиального изгибающего момента (14). Производная функции (12) выглядит следующим образом:

$$\frac{d\phi}{dx} = C_1 \frac{n}{2} \left[(1+\mu)M\left(\frac{3+\mu}{2}, 2, \frac{nx^2}{2}\right) - \mu M\left(\frac{1+\mu}{2}, 2, \frac{nx^2}{2}\right) \right] - \frac{\bar{p}(1+nx^2)}{(3-\mu)n} \exp\left(\frac{nx^2}{2}\right) \quad (22)$$

Учитывая (12) и (22), найдем

$$M_r = \frac{D_1(x)}{an} \left\{ C_1 \left[M_2 + \left(\frac{n^2x}{2} - \mu \right) M_1 \right] - \frac{\bar{p}(1-x+nx^2)}{(3-\mu)n} \exp\left(\frac{nx^2}{2}\right) \right\} \quad (23)$$

где:

$$M_1 = M\left(\frac{1+\mu}{2}, 2, \frac{nx^2}{2}\right), \quad M_2 = (1+\mu)M\left(\frac{3+\mu}{2}, 2, \frac{nx^2}{2}\right)$$

Из (13) и (18) получены выражения для угла поворота нормали и изгибающего момента на контуре пластинки

$$\phi(1) = C_1 \frac{n}{2} M\left(\frac{1+\mu}{2}, 2, \frac{1}{2}n\right) - \frac{\bar{p}}{(3-\mu)n} \exp\left(\frac{n}{2}\right), \quad (24)$$

$$M_r(1) = \frac{D}{a} \left[C_1 \left[M_2(1) + (0,5n^2 - \mu)M_1(1) \right] - \frac{\bar{p}x^2}{(3-\mu)} \exp\left(\frac{n}{2}\right) \right]. \quad (25)$$

Для конструирования равнонапряженной пластины после определения изгибающих моментов (19) и (20) вычисляются радиальные напряжения:

$$\sigma_r(x) = \frac{6M_r(x)}{\delta_V(x)}. \quad (26)$$

Затем находим значение параметра n , при котором:

$$\sigma_r(0) = \sigma_r(1). \quad (27)$$

Постоянную интегрирования C_1 определяем из условий закрепления пластины по контуру $x = 1$.

Модель изгиба круглой пластины переменной толщины

Работа метода начинается с построения модели изгиба круглой пластины переменной толщины. Предложенная модель в виде экспоненциальной функции Гаусса позволяет определять оптимальную (равнонапряженную, минимальной массы) форму сплошной круглой пластины с произвольным закреплением по внешнему контуру. Рассмотрим абсолютно жесткое закрепление. Найдем для этого случая постоянную интегрирования C_1 из (24) при условии закрепления пластинки на контуре $x = 1$:

$$C_1 = \frac{2\bar{p}}{(3-\mu)n^2} \cdot \frac{\exp(0,5n)}{M(0,5(1+\mu), 2; 0,5n)} \quad (28)$$

Подставляем найденное по (28) значение C_1 в (24) и получаем решение для жесткого закрепления:

$$\phi(x) = \frac{\bar{p}x}{(3-\mu)n} \left[\frac{\exp(0,5n)}{\exp(0,5nx^2)} \cdot \frac{M(0,5(1+\mu), 2; 0,5nx^2)}{M(0,5(1+\mu), 2; 0,5n)} - 1 \right] \exp\left(\frac{nx^2}{2}\right). \quad (29)$$

Для подтверждения адекватности модели жесткого закрепления в виде экспоненциальной функции Гаусса провели вычислительный эксперимент.

В результате эксперимента получили, что функция угла поворота $\phi(x)$ при любом значении параметра n при $x = 0$ и при $x = 1$ равна нулю. Это соответствует граничным условиям жесткого закрепления при осесимметричном деформировании пластины, что подтверждает адекватность принятой модели и обеспечивает возможность ее корректного использования в методе оптимизации формы круглой пластины переменной толщины.

Выводы

Положительный эффект исследования вытекает из практического внедрения его результатов в реальном САПР, действующем на производстве сосудов, работающих под давлением. Для этого на ПАО «Бердичевский машиностроительный завод «Прогресс» были проведены испытания метода проектирования равнонапряженных узлов сопряжения цилиндрических и плоских корпусных элементов на основе моделирования формы последних гипергеометрическими функциями.

В качестве объекта проектирования был выбран бак БСК 16. В результате практических испытаний установлено, что при переходе к новым методам проектирования металлоемкость бака снизилась на 7,15 % при сохранении прочностных характеристик основных деталей и узлов.

Перспективы дальнейшего развития

Перспективы дальнейшего развития вытекают из подтверждения эффективности использования метода оптимизации формы круглой пластины переменной толщины, заключающегося в переходе от фиксированной толщины пластинки в ее центре к ее фиксированному объему.

Перспективной является также модель изгиба круглой пластины переменной толщины в виде экспоненциальной функции Гаусса, учитывающая зависимости толщины в центре пластинки от ее объема, используемая в рамках предложенного метода.

Список использованных источников: 1. *Arnab, B., Islam S. M. R. and oth. Finite difference solution to thermoelastic field in a thin circular FGM disk with a concentric hole / Procedia Engineering, 2014. – Vol. 90. – P.193-198.* 2. *Житомирский, Г. И. Конструкция самолетов. – М.: Машиностроение, 1995. – 400 с.* 3. *Goncharova, O., Maksimov V. and oth Method of Durability Life Approval of Motor Vehicle Axle Beam for Design Optimization. – XVI Conference “Science and Motor Vehicles-97”. – Belgrade, 1997. – P. 175-178.* 4. *Водопьянов, А. И. Причины и механизмы разрушений в эксплуатации лопаток турбины двигателя НК–8–2У / А. И. Водопьянов, П. В Павленко // Научный вестник МГТУ ГА. Серия Аэромеханика и прочность, 2007. – № 119. – С. 36-40.* 5. *Тимошенко, С. П. Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Наука, 1966. – 636 с.* 6. *Становский, А. Л. Оптимизация профиля несущих элементов металлоконструкций. / А. Л. Становский, В. Г. Максимов и др. // Науківий вісник ОГПУ. – 1998. – № 6. – С. 139-144.* 7. *Daschenko, O. Mathematical model of connections cylindrical shell with the bottom variable thickness / O. Daschenko, O. Stanovskiy and oth. // «Information technology and automation – 2016»: Proceedings IX Annual scientific conference. – Odessa, ONAFT, 2016. – P. 29-30.* 8. *Вайнберг, Д. В. Расчет пластин / Д. В. Вайнберг, Е. Д. Вайнберг. – К.: Будівельник, 1970. – 436 с.* 9. *Евсейчик, Ю. Б., Чувствительность гидроакустического датчика давления / Ю. Б. Евсейчик, К. В. Медведев // Гидравлика и гидротехника. – Киев: НТУ, 2008. – Вып. 62. – С. 10-16.* 10. *Шляхин, Д. А. Вынужденные осесимметричные колебания тонкой круглой биморфной пластины ступенчатой толщины и жесткости // Инженерный вестник Дона, 2013. – Вып. 1 (24). – С. 21-25.* 11. *ДНАОП 0.00–1.07–9.4. Правила устройства и безопасной эксплуатации сосудов, работающих под давлением / Киев: Комитет по надзору за охраной труда Украины, 1994. – 55 с.* 12. *Коренева, Е. Б. Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения. – М.: АСВ, 2009. – 238 с.* 13. *Приходько, Н. Б. О двух способах построения теории пластин переменной толщины / Н. Б. Приходько, Г. С. Лейзерович и др. // Ученые записки КНАГТУ. – Комсомольск-на-Амуре, 2014. – № 4–1 (20). – С. 46-54.* 14. *Рогалевиц, В.В. Новый приближенный метод расчета гибких пластин постоянной и переменной толщины / В.В. Рогалевиц, С.А. Тимаев // Академический вестник УРАЛНИИПРОЕКТ, 2012. – № 1. – С. 67-71.* 15. *Математическое моделирование профиля равного сопротивления / В. В. Новиков, В. Г. Максимов и др. // Оптимизация в материаловедении. – Одесса: АстроПринт, 1999. – С. 151.* 16. *Abramovitz, M. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables // M. Abramovitz, I. A. Stegun – Washington, 1972. – 832 p.* 17. *Хомяк, Ю.М. Розв'язок задачі вигину круглої пластини змінної товщини з використанням функцій Уїттекера / Ю.М. Хомяк, Г.Ж. Тшигам // Моделирование в прикладных научных исследованиях. – Одесса: ОНПУ, 2015. – Вып. 23. – С. 79-80.* 18. *Kazuhiko, Aomoto and oth. Theory of Hypergeometric Functions / Springer, 2011. – Vol. 305. – 317 p.* 19. *Кузнецов, Е. А. Методы математической физики / Е.А. Кузнецов, Д.А. Шануро // НГУ, 2011. – Ч. I. – 131 с.* 20. *Optimization of uniformly stressed structures of cylindrical tanks in CAD / O. Saveleva, Yu. Khomyak and oth. // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2016. – № 6/7 (84). – С. 10-16.*

Bibliography (transliterated): 1. *Arnab, B., Islam S. M. R. and oth. Finite difference solution to thermoelastic field in a thin circular FGM disk with a concentric hole / Procedia Engineering, 2014. – Vol. 90. – P.193-198.* 2. *Zhitomirskij, G. I. Konstrukcija samoletov. – M.: Mashinostroenie, 1995. – 400 s.* 3. *Goncharova, O., Maksimov V. and oth Method of Durability Life Approval of Motor Vehicle Axle Beam for Design Optimization. – XVI Conference “Science and Motor Vehicles-97”. – Belgrade, 1997. – P. 175-178.* 4. *Vodop'janov, A. I. Prichiny i mehanizmy razrushenij v jekspluatacii lopatok turbiny dvigatelja NK–8–2U / A. I. Vodop'janov, P. V Pavlenko // Nauchnyj vestnik MGTU GA. Serija Ajeromehanika i prochnost', 2007. – № 119. – S. 36 – 40.* 5. *Timoshenko, S. P. Plastinki i obolochki / S. P. Timoshenko, S. Vojnovskij-Kriger. – M.: Nauka, 1966. – 636 s.* 6. *Stanovskij, A. L. Optimizacija profilja nesushhij jelementov metallokonstrukcij. / A. L. Stanovskij, V. G. Maksimov i dr. // Naukovij visnik OGPU. – 1998. – № 6. – S. 139-144.* 7. *Daschenko, O. Mathematical model of connections cylindrical shell with the bottom variable thickness / O. Daschenko, O. Stanovskiy and oth. //*

«Information technology and automation — 2016»: Proceedings IX Annual scientific conference. — Odessa, ONAFT, 2016. — P. 29 — 30. **8.** Vajnberg, D. V. Raschet plastin / D. V. Vajnberg, E. D. Vajnberg. — K.: Budivel'nik, 1970. — 436 s. **9.** Evsejchik, Ju. B., Chuvstvitel'nost' gidroakusticheskogo datchika davlenija / Ju. B. Evsejchik, K. V. Medvedev // Gidravlika i gidrotehnika. — Kiev: NTU, 2008. — Vyp. 62. — S. 10-16. **10.** Shljahin, D. A. Vynuzhdennye osesimmetrichnye kolebanija tonkoj krugloj bimorfnoj plastiny stupenchatoj tolshhiny i zhestkosti // Inzhenernyj vestnik Dona, 2013. — Vyp. 1 (24). — S. 21 — 25. **11.** DNAOP 0.00–1.07–9.4. Pravila ustrojstva i bezopasnoj jekspluatacii sosudov, rabotajushhih pod davleniem / Kiev: Komitet po nadzoru za ohranoj truda Ukrainy, 1994. — 55 s. **12.** Koreneva, E. B. Analiticheskie metody rascheta plastin peremennoj tolshhiny i ih prakticheskie prilozhenija. — M.: ASV, 2009. — 238 s. **13.** Prihod'ko, N.B. O dvuh sposobah postroenija teorii plastin peremennoj tolshhiny / N.B. Prihod'ko, G.S. Lejzerovich i dr. // Uchenye zapiski KnAGTU. — Komsomol'sk-na-Amure, 2014. — № 4–1 (20). — S. 46-54. **14.** Rogalevich, V.V. Novyj priblizhennyj metod rascheta gibkih plastin postojannoj i peremennoj tolshhiny / V.V. Rogalevich, S.A. Timashev // Akademicheskij vestnik URALNIIPROEKT, 2012. — № 1. — S. 67-71. **15.** Matematicheskoe modelirovanie profiljaavnogo soprotivlenija / V. V. Novikov, V. G. Maksimov i dr. // Optimizacija v materialovedenii. — Odessa: AstroPrint, 1999. — S. 151. **16.** Abramovitz, M. Handbook of mathematical functions with formulas, grafs and mathematical tables // M. Abramovitz, I.A. Stegun — Washington, 1972. — 832 p. **17.** Homjak, Ju. M. Rozv'jazok zadachi viginu krugloj plastini zminnoj tovshhiny z vikoristannjam funkcij Uittekera / Ju. M. Homjak, G. Zh. Tshigam // Modelirovanie v prikladnyh nauchnyh issledovanijah. — Odessa: ONPU, 2015. — Vyp. 23. — S. 79-80. **18.** Kazuhiko, Aomoto find oth. Theory of Hypergeometric Functions / Springer, 2011. — Vol. 305. — 317 p. **19.** Kuznecov, E.A. Metody matematicheskoy fiziki / E. A. Kuznecov, D. A. Shapiro // NGU, 2011. — Ch. I. — 131 s. **20.** Optimization of uniformly stressed structures of cylindrical tanks in CAD / O. Saveleva, Yu. Khomyak and oth. // Vostochno-evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij. — Har'kov, 2016. — No 6/7 (84). — S. 10-16.